Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 67

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

3 de diciembre de 2021

1. Solucionar el sistema $\begin{cases} t\cosh\eta + x\sinh\eta = 0 \\ t\sinh\eta + x\cosh\eta = x' \end{cases}$

Escribiendo el sistema en forma de matrices:

$$\begin{pmatrix} t & x \\ x & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\eta \\ \sinh\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix} \tag{1}$$

Podemos usar la siguiente fórmula para calcular inversas de matrices 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{2}$$

Como la matriz en (1) tiene determinante $|A| = t^2 - x^2 = s^2$ la matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} t & -x \\ -x & t \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \cosh\eta \\ \sinh\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} t & -x \\ -x & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix} = \frac{x'}{s^2}\begin{pmatrix} -x \\ t \end{pmatrix}$$

O, explicitamente:

$$\boxed{\cosh\eta = \frac{-xx'}{t^2 - x^2}, \qquad \sinh\eta = \frac{tx'}{t^2 - x^2}, \qquad \tanh\eta = \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta} = -\frac{t}{x}} \tag{3}$$

2. Solucionar el sistema $\begin{cases} t\cosh\eta + x\sinh\eta = t' \\ t\sinh\eta + x\cosh\eta = 0 \end{cases}$

Este sistema se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} t & x \\ x & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh\eta \\ \sinh\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Por lo que ya sabemos que su solución será

$$\begin{pmatrix} \cosh\eta \\ \sinh\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} t & -x \\ -x & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{t'}{s^2}\begin{pmatrix} t \\ -x \end{pmatrix} \tag{5}$$

Usando que $t^2 > x^2$ podemos reescribir la solución como

$$\tanh\eta = -\frac{x}{t} \Longrightarrow \boxed{\eta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2 - x^2}{(t+x)^2}\right)} \tag{6}$$

3. Dados A y B operadores hermíticos, demostrar que $[A,B]$ es antihermítico.

Usando la definición de conmutador $[A,B] = AB - BA$ junto con las propiedades $(A-B)^\dagger = A^\dagger - B^\dagger$ y $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ obtenemos

$$([A,B])^\dagger = (AB - BA)^\dagger = (AB)^\dagger - (BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = \left[B^\dagger, A^\dagger\right] = -\left[A^\dagger, B^\dagger\right] \tag{7}$$

Usando ahora la información que A y B son hermíticos obtenemos la condición $A^\dagger = A$ y $B^\dagger = B$ que nos permite escribir

$$\boxed{([A,B])^\dagger = -[A,B]} \tag{8}$$

Que es precisamente la definición de operador anti-hermítico.